2.1 La derivada y el problema de la recta tangente

- **Hallar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto.**
- **Usar la definición de límite para calcular la derivada de una función.**
- **Comprobar la relación entre derivabilidad y continuidad.**

Mary Evans Picture Library

ISAAC NEWTON (1642-1727)

Además de sus trabajos relativos al Cálculo, Newton aportó contribuciones a la Física tan revolucionarias como la Ley de la Gravitación Universal y sus tres leyes del movimiento.

El problema de la recta tangente

El cálculo se desarrolló a la sombra de cuatro problemas en los que estaban trabajando los matemáticos europeos en el siglo XVII.

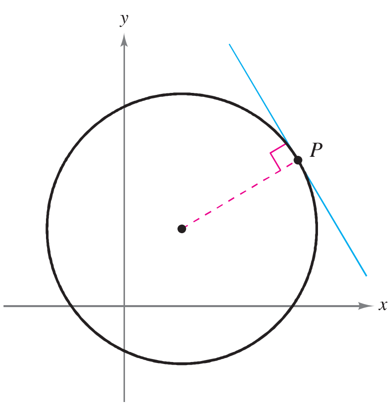
1. El problema de la recta tangente (sección 1.1 y esta sección)
2. El problema de la velocidad y la aceleración (secciones 2.2 y 2.3)
3. El problema de los máximos y mínimos (sección 3.1)
4. El problema del área (secciones 1.1 y 4.2)

Cada uno de ellos involucra la noción de límite y podría servir como introducción al cálculo.

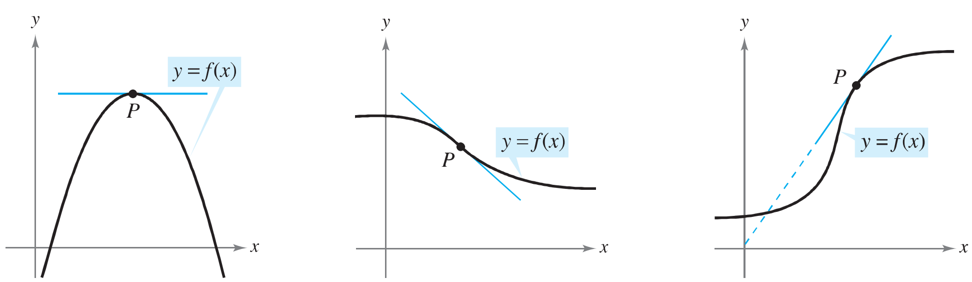
En la sección 1.1 se hizo una breve introducción al problema de la recta tangente. Aunque Pierre de Fermat (1601-1665), René Descartes (1596-1650), Christian Huygens (1629-1695) e Isaac Barrow (1630-1677) habían propuesto soluciones parciales, la primera solución general se suele atribuir a Isaac Newton (1642-1727) y a Gottfried Leibniz (1646-1716). El trabajo de Newton respecto a este problema procedía de su interés por la refracción de la luz y la óptica.

¿Qué quiere decir que una recta es tangente a una curva en un punto? En una circunferencia, la recta tangente en un punto P es la recta perpendicular al radio que pasa por P, como se muestra en la figura 2.1.

Sin embargo, en una curva general el problema se complica. Por ejemplo, ¿cómo se podrían definir las rectas tangentes que se observan en la figura 2.2? Afirmando que una recta es tangente a una curva en un punto P si toca a la curva en P sin atravesarla. Tal definición sería correcta para la primera curva de la figura 2.2, pero no para la segunda. También se podría decir que una recta es tangente a una curva si la toca o hace intersección en ella exactamente en el punto P, definición que serviría para una circunferencia pero no para curvas más generales, como sugiere la tercera curva de la figura 2.2.



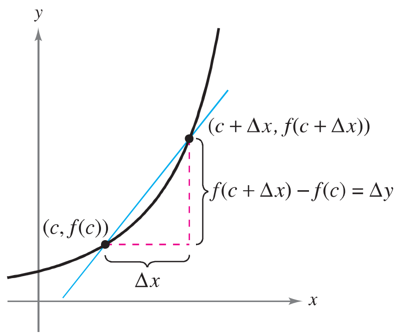
Recta tangente a una circunferencia
Figura 2.1



Recta tangente a una curva en un punto
Figura 2.2

EXPLORACIÓN

Identificación de una recta tangente Utilizar una herramienta de graficación para representar la función $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 5$. En la misma pantalla, dibujar la gráfica $y = x - 5$, $y = 2x - 5$ y $y = 3x - 5$. ¿Cuál de estas rectas, si es que hay alguna, parece tangente a la gráfica de f en el punto $(0, -5)$? Explicar el razonamiento.



Recta secante que pasa por $(c, f(c))$ y $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$
Figura 2.3

En esencia, el problema de encontrar la recta tangente en un punto P se reduce al de calcular su *pendiente* en ese punto. Se puede aproximar la pendiente de la recta tangente usando la **recta secante*** que pasa por P y por otro punto cercano de la curva, como se muestra en la figura 2.3. Si $(c, f(c))$ es el punto de tangencia y $(c + \Delta x, f(c + \Delta x))$ es el otro punto de la gráfica de f, la pendiente de la recta secante que pasa por ambos puntos se encuentra sustituyendo en la fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{(c + \Delta x) - c} \qquad \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}.$$

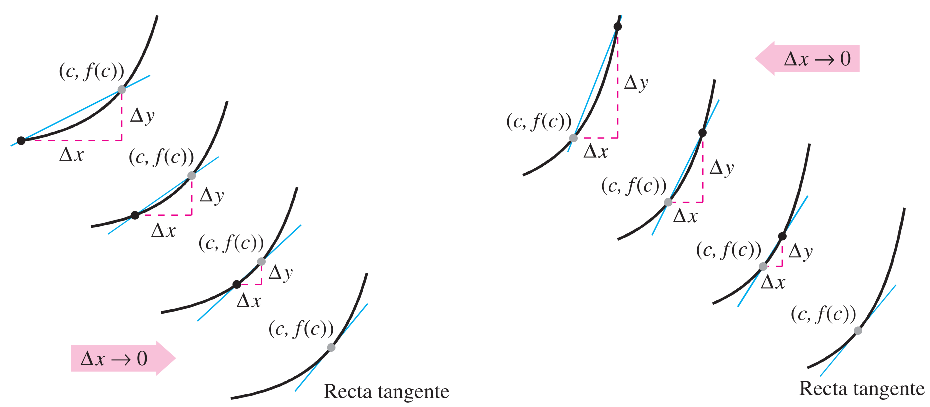
$$m_{\text{sec}} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}. \qquad \text{Pendiente de la recta secante.}$$

El miembro de la derecha en esta ecuación es un **cociente de incremento o de diferencias**. El denominador Δx es el **cambio** (o incremento) **en *x*** y el numerador $\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c)$ es el **cambio** (o incremento) **en *y***.

La belleza de este procedimiento radica en que se pueden obtener más aproximaciones y más precisas de la pendiente de la recta tangente tomando puntos de la gráfica cada vez más próximos al punto P de tangencia, como se muestra en la figura 2.4.

EL PROBLEMA DE LA RECTA TANGENTE
En 1637 el matemático René Descartes afirmó lo siguiente respecto al problema de la recta tangente:

"Y no tengo inconveniente en afirmar que éste no es sólo el problema de Geometría más útil y general que conozco, sino incluso el que siempre desearía conocer."



Aproximaciones a la recta tangente
Figura 2.4

DEFINICIÓN DE LA RECTA TANGENTE CON PENDIENTE *m*

Si f está definida en un intervalo abierto que contiene a c y además existe el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m$$

entonces la recta que pasa por $(c, f(c))$ y cuenta con una pendiente m es la **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$.

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$ se llama también **pendiente de la gráfica de *f* en $x = c$**.

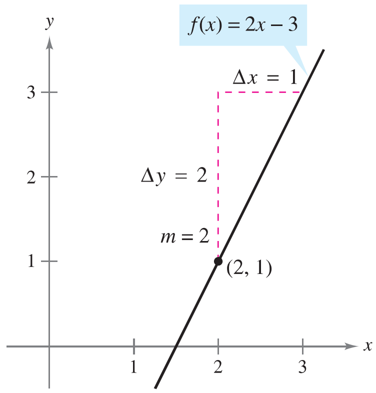
* *El uso de la palabra* secante *procede del latín* secare, *que significa cortar, y no es una referencia a la función trigonométrica del mismo nombre.*

EJEMPLO 1 La pendiente de la gráfica de una función lineal

Encontrar la pendiente de la gráfica de

$$f(x) = 2x - 3$$

en el punto (2, 1).



La pendiente de f en (2, 1) es $m = 2$
Figura 2.5

Solución Para encontrar la pendiente de la gráfica de f cuando $c = 2$, aplicar la definición de la pendiente de una recta tangente como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[2(2+\Delta x)-3]-[2(2)-3]}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{4+2\Delta x-3-4+3}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0} 2\\ &= 2\end{aligned}$$

La pendiente de f en $(c, f(c)) = (2, 1)$ es $m = 2$, como se observa en la figura 2.5.

NOTA En el ejemplo 1, la definición de la pendiente de f por medio de límites concuerda con la definición analizada en la sección P.2.

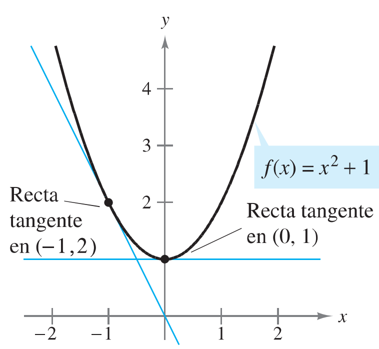
La gráfica de una función lineal tiene la misma pendiente en todos sus puntos. Esto no sucede en las funciones no lineales, como se puede observar en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Rectas tangentes a la gráfica de una función no lineal

Calcular las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de

$$f(x) = x^2 + 1$$

en los puntos (0, 1) y (−1, 2), que se ilustran en la figura 2.6.



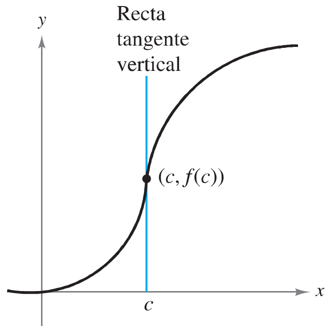
La pendiente de f en un punto cualquiera $(c, f(c))$ es $m = 2c$
Figura 2.6

Solución Sea $(c, f(c))$ un punto cualquiera de la gráfica de f. La pendiente de la recta tangente en él se encuentra mediante:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[(c+\Delta x)^2+1]-(c^2+1)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{c^2+2c(\Delta x)+(\Delta x)^2+1-c^2-1}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2c(\Delta x)+(\Delta x)^2}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}(2c+\Delta x)\\ &= 2c.\end{aligned}$$

De tal manera, la pendiente en *cualquier* punto $(c, f(c))$ de la gráfica de f es $m = 2c$. En el punto (0, 1) la pendiente es $m = 2(0) = 0$ y en $(-1, 2)$ la pendiente es $m = 2(-1) = -2$.

NOTA Observar que en el ejemplo 2, c se mantiene constante en el proceso de límite (cuando $\Delta x \to 0$).



La gráfica de f tiene recta tangente vertical en $(c, f(c))$
Figura 2.7

La definición de la recta tangente a una curva no incluye la posibilidad de una recta tangente vertical. Para éstas, se usa la siguiente definición. Si f es continua en c y

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = -\infty$$

la recta vertical, $x = c$, que pasa por $(c, f(c))$ es una **recta tangente vertical** a la gráfica de f, por ejemplo, la función que se muestra en la figura 2.7 tiene tangente vertical en $(c, f(c))$. Si el dominio de f es el intervalo cerrado $[a, b]$, se puede ampliar la definición de recta tangente vertical de manera que incluya los extremos, considerando la continuidad y los límites por la derecha (para $x = a$) y por la izquierda (para $x = b$).

Derivada de una función

Se ha llegado a un punto crucial en el estudio del cálculo. El límite utilizado para definir la pendiente de una recta tangente también se utiliza para definir una de las dos operaciones fundamentales del cálculo: la **derivación**.

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

La **derivada** de f en x está dada por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

siempre que exista ese límite. Para todos los x para los que exista este límite, f' es una función de x.

Observar que la derivada de una función de x también es una función de x. Esta "nueva" función proporciona la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$, siempre que la gráfica tenga una recta tangente en dicho punto.

El proceso de calcular la derivada de una función se llama **derivación**. Una función es **derivable** en x si su derivada en x existe, y **derivable en un intervalo abierto (a, b)** si es derivable en todos y cada uno de los puntos de ese intervalo.

Además de $f'(x)$, que se lee "f prima de x", se usan otras notaciones para la derivada de $y = f(x)$. Las más comunes son:

$$f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad y', \quad \frac{d}{dx}[f(x)], \quad D_x[y].$$

Notaciones para la derivada.

La notación dy/dx se lee "derivada de *y con respecto a x*" o simplemente "dy, dx". Usando notaciones de límites, se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x). \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Cálculo de la derivada mediante el proceso de límite

Calcular la derivada de $f(x) = x^3 + 2x$.

Solución

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} && \text{Definición de derivada.} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 + 2(x+\Delta x) - (x^3+2x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2x + 2\Delta x - x^3 - 2x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}\left[3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\right]}{\cancel{\Delta x}} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\right] \\ &= 3x^2 + 2 \end{aligned}$$

AYUDA DE ESTUDIO Cuando se use la definición para encontrar la derivada de una función, la clave consiste en volver a expresar el cociente incremental (o cociente de diferencias), de manera que Δx no aparezca como factor del denominador.

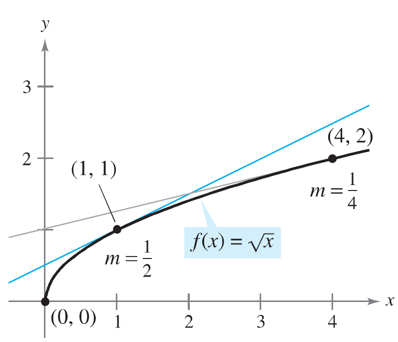
Cabe recordar que la derivada de una función f es en sí una función, misma que puede emplearse para encontrar la pendiente de la recta tangente en el punto $(x, f(x))$ de la gráfica de f.

EJEMPLO 4 Uso de la derivada para calcular la pendiente en un punto

Encontrar $f'(x)$ para $f(x) = \sqrt{x}$. Calcular luego la pendiente de la gráfica de f en los puntos $(1, 1)$ y $(4, 2)$. Analizar el comportamiento de f en $(0, 0)$.

Solución Se racionaliza el numerador, como se explicó en la sección 1.3.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} && \text{Definición de derivada.} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}\right) \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0 \end{aligned}$$



La pendiente de f en $(x, f(x))$, $x > 0$, es $m = 1/(2\sqrt{x})$
Figura 2.8

En el punto $(1, 1)$ la pendiente es $f'(1) = \frac{1}{2}$. En el punto $(4, 2)$ la pendiente es $f'(4) = \frac{1}{4}$. Ver la figura 2.8. En el punto $(0, 0)$ la pendiente no está definida. Además, la gráfica de f tiene tangente vertical en $(0, 0)$.

En muchas aplicaciones, resulta conveniente usar una variable independiente distinta de x, como se manifiesta en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Cálculo de la derivada de una función

Encontrar la derivada de la función $y = 2/t$ respecto a t.

Solución Considerando $y = f(t)$, se obtiene

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$ Definición de derivada.

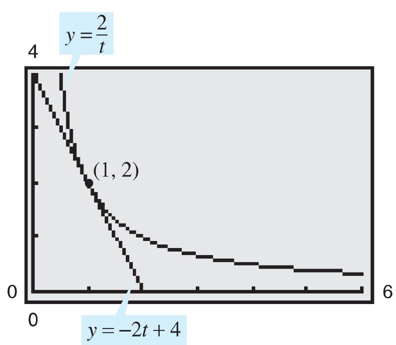
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{2}{t + \Delta t} - \dfrac{2}{t}}{\Delta t}$$ $f(t + \Delta t) = 2/(t + \Delta t)$ y $f(t) = 2/t$.

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{2t - 2(t + \Delta t)}{t(t + \Delta t)}}{\Delta t}$$ Combinar las fracciones del numerador.

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-2\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}(t)(t + \Delta t)}$$ Cancelar el factor común Δt.

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-2}{t(t + \Delta t)}$$ Simplificar.

$$= -\frac{2}{t^2}.$$ Evaluar el límite cuando $\Delta t \to 0$.



En el punto (1, 2) la recta $y = -2t + 4$ es tangente a la gráfica de $y = 2/t$
Figura 2.9

TECNOLOGÍA Se puede utilizar una herramienta de graficación para corroborar el resultado del ejemplo 5. Es decir, usando la fórmula $dy/dt = -2/t^2$, se sabe que la pendiente de la gráfica de $y = 2/t$ en el punto (1, 2) es $m = -2$. Esto implica que, usando la forma punto-pendiente, una ecuación de la recta tangente a la gráfica en (1, 2) es

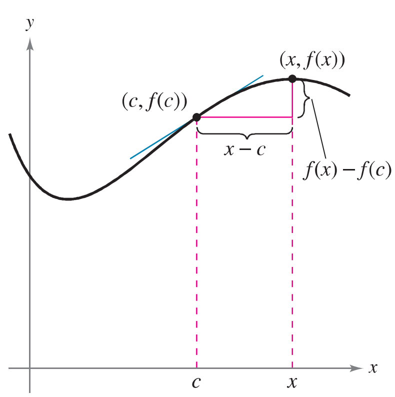
$$y - 2 = -2(t - 1) \quad \text{o} \quad y = -2t + 4$$

como se muestra en la figura 2.9.

Derivabilidad y continuidad

La siguiente forma alternativa como límite de la derivada es útil al investigar la relación que existe entre derivabilidad y continuidad. La derivada de f en c es

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$ Fórmula alternativa de la derivada.

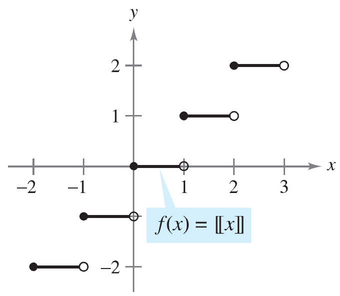


Cuando x tiende a c, la recta secante se aproxima a la recta tangente
Figura 2.10

siempre que dicho límite exista (ver la figura 2.10). (En el apéndice A se demuestra la equivalencia de ambas fórmulas.) Observe que la existencia del límite en esta forma alternativa requiere que los límites unilaterales

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

existan y sean iguales. Estos límites laterales se denominan **derivada por la izquierda y por la derecha**, respectivamente. Se dice que f es **derivable en un intervalo cerrado [a, b]** si es derivable en (a, b) y existen además la derivada por la derecha en a y la derivada por la izquierda en b.



La función parte entera no es derivable en $x = 0$, ya que no es continua en ese punto
Figura 2.11

Si una función no es continua en $x = c$, no puede ser derivable en $x = c$. Por ejemplo, la función parte entera o mayor entero

$$f(x) = [\![x]\!]$$

no es continua en $x = 0$, y en consecuencia no es derivable en $x = 0$ (ver la figura 2.11). Esto se comprueba con sólo observar que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{[\![x]\!] - 0}{x} = \infty \qquad \text{Derivada por la izquierda.}$$

y

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{[\![x]\!] - 0}{x} = 0. \qquad \text{Derivada por la derecha.}$$

Aunque es cierto que derivable implica continua (como se muestra en el teorema 2.1), el recíproco no es cierto. En otras palabras, puede ocurrir que una función sea continua en $x = c$ y *no* sea derivable en $x = c$. Los ejemplos 6 y 7 ilustran tal posibilidad.

EJEMPLO 6 Una gráfica con un punto angular

La función

$$f(x) = |x - 2|$$

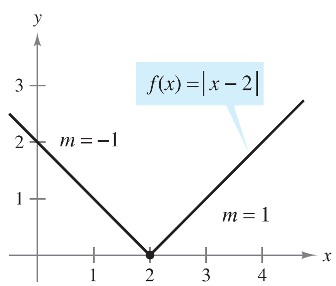
que se muestra en la figura 2.12 es continua en $x = 2$. Sin embargo, los límites unilaterales

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{|x - 2| - 0}{x - 2} = -1 \qquad \text{Derivada por la izquierda.}$$

y

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{|x - 2| - 0}{x - 2} = 1 \qquad \text{Derivada por la derecha.}$$

no son iguales. Por consiguiente, f no es derivable en $x = 2$ y la gráfica de f no tiene una recta tangente en el punto $(2, 0)$.



f no es derivable en $x = 2$, porque las derivadas laterales no son iguales
Figura 2.12

EJEMPLO 7 Una gráfica con una recta tangente vertical

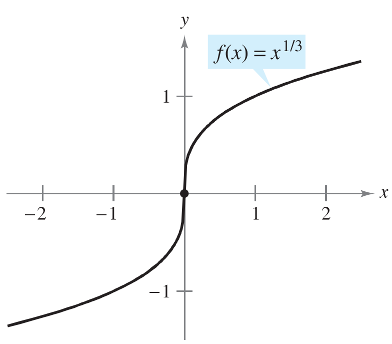
La función

$$f(x) = x^{1/3}$$

es continua en $x = 0$, como se observa en la figura 2.13. Sin embargo, como el límite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^{1/3} - 0}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}} \\ &= \infty\end{aligned}$$

es infinito, se puede concluir que la recta tangente en $x = 0$ es vertical. Por tanto, f no es derivable en $x = 0$.



f no es derivable en $x = 0$, porque tiene tangente vertical en ese punto
Figura 2.13

En los ejemplos 6 y 7 se puede observar que una función no es derivable en un punto donde su gráfica cuenta con un punto angular *o* una tangente vertical.

TECNOLOGÍA Algunas herramientas de graficación utilizan los programas de cálculo *Maple*, *Mathematica* y *TI89*, para realizar una derivación simbólica. Otros la hacen *numérica*, calculando valores de la derivada mediante la fórmula

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

donde Δx es un número pequeño como 0.001. ¿Observa algún problema con esta definición? Por ejemplo, usándola ¿cuál sería la derivada de $f(x) = |x|$ en $x = 0$?

TEOREMA 2.1 DERIVABLE IMPLICA CONTINUA

Si f es derivable en $x = c$, entonces f es continua en $x = c$.

DEMOSTRACIÓN Para comprobar que f es continua en $x = c$ bastará con mostrar que $f(x)$ tiende a $f(c)$ cuando $x \to c$. Para tal fin, usar la derivabilidad de f en $x = c$ considerando el siguiente límite.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c}\,[f(x) - f(c)] &= \lim_{x\to c}\left[(x - c)\left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)\right] \\
&= \left[\lim_{x\to c}\,(x - c)\right]\left[\lim_{x\to c}\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right] \\
&= (0)[f'(c)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Puesto que la diferencia $f(x) - f(c)$ tiende a cero cuando $x \to c$, se puede concluir que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. De tal manera, f es continua en $x = c$.

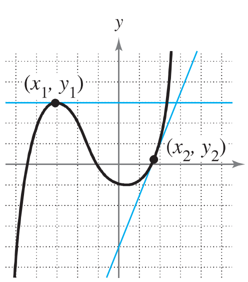
Los siguientes enunciados expresan en forma resumida la relación que existe entre continuidad y derivabilidad:

1. Si una función es derivable en $x = c$, entonces es continua en $x = c$. Por tanto, derivable implica continua.
2. Es posible que una función sea continua en $x = c$ sin ser derivable. En otras palabras, continua no implica derivable (ver el ejemplo 6).

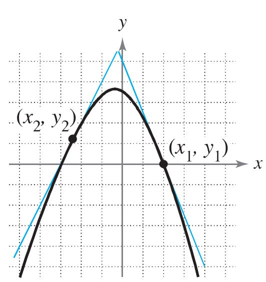
2.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, estimar la pendiente de la curva en los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

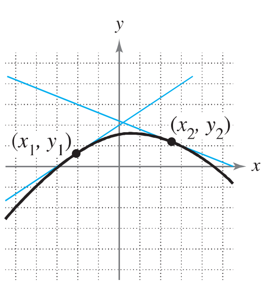
1. *a)*



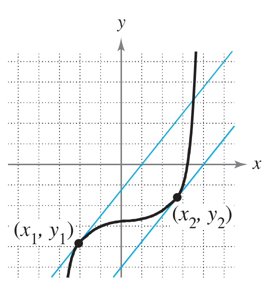
b)



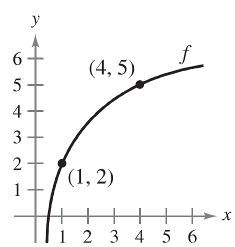
2. *a)*



b)



Con el fin de resolver los ejercicios 3 y 4, utilizar la gráfica que se muestra a continuación.



3. Identificar o trazar en la figura cada una de las cantidades siguientes.

a) $f(1)$ y $f(4)$ *b)* $f(4) - f(1)$

c) $y = \dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1}(x - 1) + f(1)$

4. Escribir un símbolo de desigualdad ($<$ o $>$) entre las cantidades dadas.

a) $\dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1} \quad \square \quad \dfrac{f(4) - f(3)}{4 - 3}$

b) $\dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1} \quad \square \quad f'(1)$